Elektrotechnické listy, ISSN 2453-8981, ročník/vol. 1, číslo/no. 1

# Řešení inverzní kinematické úlohy pomocí nové heuristické metody relaxace délky

# Inverse Kinematic Problem Solved By New Heuristic Algorithm Length Relaxation Metod

Ing. Jan Čejka[1,2]

[1] jan.cejka@tul.cz, [2] jan.cejka3@skoda-auto.cz

[1]Technická univerzita v Liberci, Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií, Česká republika
[2]ŠKODA AUTO a.s., Plánování svařoven, Česká republika

***Abstrakt*—Tento článek popisuje novou iterační heuristickou metodu pro řešení inverzní kinematické úlohy. Metoda relaxace délky je založena na cyklickém procházení kinematického řetězce a systematickém přizpůsobení vzdálenosti mezi kloubovými spoji. Metoda relaxace délky je velmi jednoduše implementovatelná a v konečné instanci extrémně rychlá. Metoda také nabízí numericky stabilní řešení. Tento článek diskutuje implementaci algoritmu s ukázkou vzorového řešení na jednoduchém kinematickém řetězci. Dále jsou v článku porovnány vlastnosti algoritmu s nejpopulárnější heuristickou metodou pro řešení inverzní kinematické úlohy CCD (Cyclic Coordinate Descent).**

***Klíčová slova*—Algoritmus, Heuristika, Inverzní, Kinematika, Relaxace***

***Abstract*— This paper presents new iterative heuristic algorithm for a inverse kinematic problem. The length relaxation metod is based on cycle through the kinematic chain and systematic adjustment of length. The length relaxation metod is very simple to implement and is extremely fast. It provides also a numerically stable solution. This article discusses implementation of algorithm and shows sample solution on simple chain kinematic problem. Furthermore there is compared properties of the algorithm with the most poupular heuristic technique CCD (Cyclic Coordinate Descent).**

***Keywords*—Algorithm, Heuristic, Inverse, Kinematic, Relaxation***

## I. ÚVOD

Přímá a inverzní úloha kinematiky patří mezi základní problematiku, která před námi stojí, při popisu kinematických vazeb v robotice [1], při řešení mechanických manipulátorů [2], nebo při animaci pohybu ve filmovém a herním průmyslu [3-4]. Především popis inverzní kinematiky u složitějších kinematických struktur bývá matematicky obtížný. Pro řešení inverzní kinematické úlohy bylo navrženo mnoho metod [5-8], přičemž výběr vhodné metody ovlivňuje struktura kinematického řetězce. Existují analytické přístupy, mezi které patří geometrické metody (např. kinematická dekompozice) a algebraické metody (např. řešení polynomiálních rovnic). Úloha inverzní kinematiky vede na problematiku soustav nelineárních rovnic. Je proto možné použít některé numerické metody, např. Newtonovu metodu, Gradientní metodu, nebo metody založené na užití Jacobiho matice. Další skupinou jsou heuristické algoritmy. Heuristické algoritmy jsou vhodné pro rychlejší řešení problému, pokud jsou klasické metody příliš pomalé, nebo pro nalezení aproximace řešení, pokud klasické metody selhávají při nalezení přesného řešení. Mezi heuristické metody patří populární heuristický algoritmus CCD (Cyclic Coordinate Descent), který se hojně využívá při animaci pohybu.

Nový algoritmus diskutovaný v tomto článku patří do skupiny heuristických metod a je možnou alternativou k algoritmu CCD.

### A. *Přímá kinematická úloha*

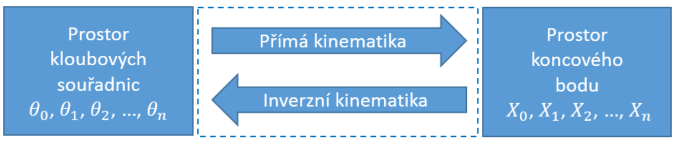
Přímá kinematická úloha [9] je zobrazení z prostoru kloubových souřadnic do prostoru polohy koncového bodu (efektoru) kinematického řetězce. To znamená, že známe polohy všech (nebo některých) kloubů $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ a hledáme polohu koncového bodu (efektoru) ve světovém souřadnicovém systému $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ (1)(Obr. 1).

$$X = f(\theta) \tag{1}$$

### B. *Inverzní kinematická úloha*

Inverzní kinematická úloha [9] je zobrazení z prostoru polohy koncového bodu (efektoru) kinematického řetězce do prostoru kloubových souřadnic. To znamená, že známe polohu koncového bodu (efektoru) ve světovém souřadnicovém systému $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ a hledáme polohy všech kloubů $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ (2)(Obr. 1).

$$\theta = f^{-1}(X) \tag{2}$$

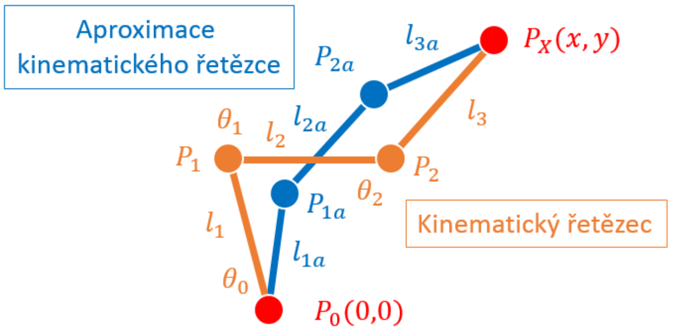



Obr. 1. Přímá a inverzní úloha kinematiky

## II. PODSTATA METODY RELAXACE DÉLKY

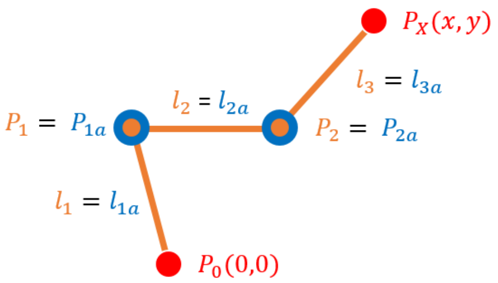
Uvažujme následující situaci. Máme kinematický řetězec s třemi rotačními klouby v bodech ($P_0$, $P_1$, $P_2$) a tři kloubové spoje o délce ($l_1$, $l_2$, $l_3$). Tato situace je znázorněna oranžovou barvou na obr. 2. Pozice počátečního bodu $P_0$ a pozice koncového bodu $P_x$ je známa. Známé body jsou označeny červenou barvou. Pozice bodů $P_1$ a $P_2$ není známa. Naším úkolem je určit úhel rotačních kloubů $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ v bodech $(P_0, P_1, P_2)$.

V prvním kroku si určíme aproximační kinematický řetězec s náhodně umístěnými body $P_{1a}$ a $P_{2a}$. Délka kloubových spojů není stejná $(l_1 \neq l_{1a}, l_2 \neq l_{2a}, l_3 \neq l_{3a})$. Aproximační kinematický řetězec je znázorněn modrou barvou na obr. 2.




Obr. 2. Aproximace kinematického řetězce

Hlavní myšlenka metody relaxace délky je: Pokud nalezneme takové body $P_{1a}$ a $P_{2a}$ aproximačního kinematického řetězce, že $l_1 = l_{1a}$, $l_2 = l_{2a}$ a $l_3 = l_{3a}$, pak tyto body můžeme prohlásit za $P_1$ a $P_2$. Celková délka obou řetězců je pak stejná a počáteční bod $P_0$ a koncový bod $P_x$ je spojen stejnou kinematickou strukturou. Následně můžeme určit úhly všech rotačních kloubů $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$, jelikož známe pozici všech bodů aproximačního kinematického řetězce $(P_0,\ P_1 = P_{1a},\ P_2 = P_{2a}, P_x)$. Optimální řešení je znázorněné na obr. 3.




Obr. 3. Optimální řešení metody relaxace délky

## III. ALGORITMUS METODY RELAXACE DÉLKY

Je zde ovšem důležitá otázka, jak upravit náhodnou počáteční pozici bodů $P_{1a}$ a $P_{2a}$ aproximačního kinematického řetězce a dosáhnout tak podmínky rovnosti délek $l_1 = l_{1a}$, $l_2 = l_{2a}$ and $l_3 = l_{3a}$. Odpověď na tuto otázku nalezneme v novém heuristickém algoritmu relaxace délky.

Algoritmus relaxace délky funguje tak, že postupně procházíme aproximační kinematický řetězec a relaxujeme všechny délky kloubových spojů. Relaxace délky znamená, že pokud délka $l_i$ kinematického řetězce není rovna odpovídající délce $l_{ia}$ aproximačního kinematického řetězce $l_i \neq l_{ia}$, přesuneme bod aproximačního kinematického řetězce $P_{ia}$ ve směru $\overrightarrow{P_{(i-1)a}P_{ia}}$ tak, aby $l_i = l_{ia}$ (3)(4). Body, u kterých známe jejich pozici (v našem případě $P_0$ a $P_x$), nepřesouváme. Pokud narazíme při průchodu aproximačním kinematickým řetězcem na bod se známou pozicí, začneme procházet aproximační kinematický řetězec od tohoto bodu (přímý a obrácený směr).

$$\vec{v} = (P_{xia} - P_{x(i-1)a}, P_{yia} - P_{y(i-1)a}) \tag{3}$$

$$P_{ia} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} * l_i \tag{4}$$

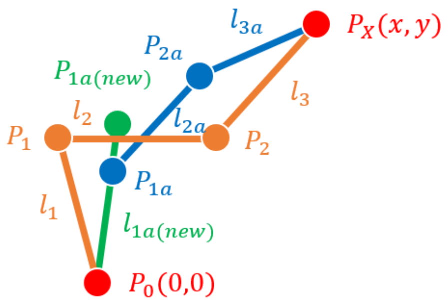
Princip algoritmu si ukážeme na situaci kinematického řetězce z obrázku 2.

### A. *Relaxace délky $l_{1a}$ (přímý směr)*

Určíme novou pozici bodu $P_{1a}$ pomocí matematických vztahů (5)(6) tak, že $l_{1a(new)} = l_1$ a vektor $\overrightarrow{P_0P_{1a}}$ má stejnou orientaci jako vektor $\overrightarrow{P_0P_{1a(new)}}$ (viz obr. 5).

$$\vec{v} = (P_{x1a} - P_{x0}, P_{y1a} - P_{y0}) \tag{5}$$

$$P_{1a(new)} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} * l_1 \tag{6}$$



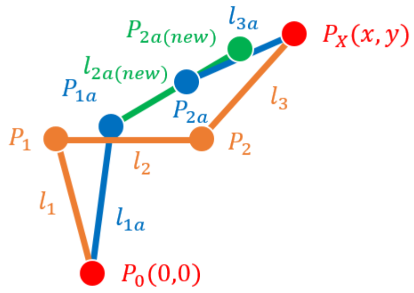

Obr. 5. Relaxace délky $l_{1a}$

### B. *Relaxace délky $l_{2a}$ (přímý směr)*

Určíme novou pozici bodu $P_{2a}$ pomocí matematických vztahů (7)(8) tak, že $l_{2a(new)} = l_2$ a vektor $\overrightarrow{P_{1a}P_{2a}}$ má stejnou orientaci jako vektor $\overrightarrow{P_{1a}P_{2a(new)}}$ (viz obr. 6).

$$\vec{v} = (P_{x2a} - P_{x1a}, P_{y2a} - P_{y1a}) \tag{7}$$

$$P_{2a(new)} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} * l_2 \tag{8}$$



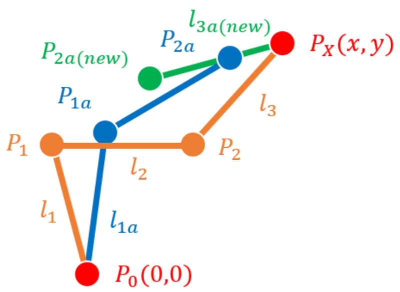

Obr. 6. Relaxace délky $l_{2a}$

### C. *Relaxace délky $l_{3a}$ (obrácený směr)*

Jelikož známý bod $P_x$ nemůžeme přesouvat, musíme obrátit směr průchodu kinematickým řetězcem. Určíme novou pozici bodu $P_{2a}$ pomocí matematických vztahů (9)(10) tak, že $l_{3a(new)} = l_3$ a vektor $\overrightarrow{P_xP_{2a}}$ má stejnou orientaci jako vektor $\overrightarrow{P_xP_{2a(new)}}$ (viz obr. 7).

$$\vec{v} = (P_{x2a} - P_{xx}, P_{y2a} - P_{yx}) \tag{9}$$

$$P_{2a(new)} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} * l_3 \tag{10}$$



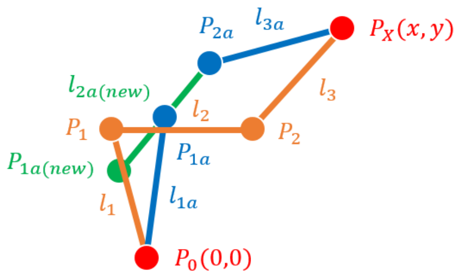

Obr. 7. Relaxace délky $l_{3a}$

*D. Relaxace délky $l_{2a}$ (obrácený směr)*

Určíme novou pozici bodu $P_{2a}$ pomocí matematických vztahů (11)(12) tak, že $l_{2a(new)} = l_2$ a vektor $\overrightarrow{P_{2a}P_{1a}}$ má stejnou orientaci jako vektor $\overrightarrow{P_{2a}P_{1a(new)}}$ (viz obr. 8).

$$\vec{v} = (P_{x1a} - P_{x2x}, P_{y1a} - P_{y2x}) \tag{11}$$

$$P_{1a(new)} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} * l_2 \tag{12}$$



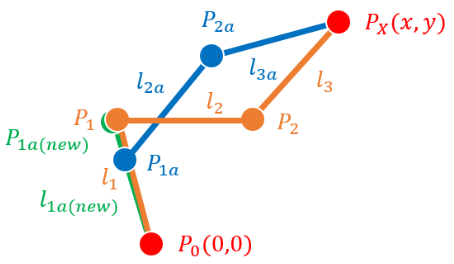

Obr. 8. Relaxace délky $l_{2a}$

*E. Relaxace délky $l_{1a}$ (přímý směr)*

Jelikož známý bod $P_0$ nemůžeme přesouvat, musíme obrátit směr průchodu kinematickým řetězcem. Celý cyklus opakujeme do té doby, než dosáhneme podmínky $l_1 = l_{1a}$, $l_2 = l_{2a}$ a $l_3 = l_{3a}$. Určíme novou pozici bodu $P_{1a}$ pomocí matematických vztahů (13)(14) tak, že $l_{1a(new)} = l_1$ a vektor $\overrightarrow{P_0P_{1a}}$ má stejnou orientaci jako vektor $\overrightarrow{P_0P_{1a(new)}}$ (viz obr. 9).

$$\vec{v} = (P_{x1a} - P_{x0}, P_{y1a} - P_{y0}) \tag{13}$$

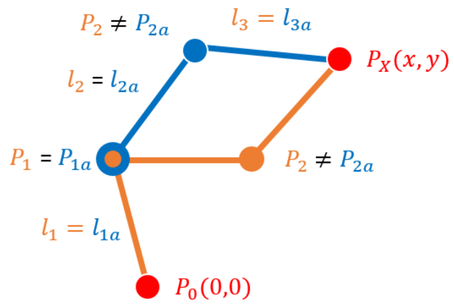
$$P_{1a(new)} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} * l_1 \tag{14}$$




Obr. 9. Relaxace délky $l_{1a}$

*F. Výsledek metody relaxace délky (neoptimální)*

Po dvou průchodech aproximačním kinematickým řetězcem dosáhneme finální aproximační pozice bodů $P_{1a}$ a $P_{2a}$. Výsledek je znázorněn na obr. 10. Technika relaxace délky je velmi rychlá a velmi jednoduše implementovatelná, jelikož algoritmus využívá pouze základní matematické operace. Existuje zde ovšem jeden problém při hledání řešení úlohy inverzní kinematiky. Celková délka obou řetězců je sice stejná, ale orientace rotačních kloubů nemusí odpovídat. Jak řešit tuto situaci je uvedeno v části IV.




Obr. 10. Výsledek metody relaxace délky (neoptimální)

## IV. POČÁTEČNÍ PODMÍNKY A OPTIMÁLNÍ ŘEŠENÍ

Existuje cesta jak dosáhnout optimálního řešení a zachovat orientaci rotačních kloubů. První problém, který můžeme jednoznačně vyřešit, je orientace posledního kloubového spoje. Pomůžeme si k řešení přímou úlohou kinematiky. Přímá úloha kinematiky může být popsána pomocí Denavit-Hartenberg notace, která popisuje pomocí D-H parametrů homogenní transformaci mezi jednotlivými klouby kinematického řetězce. Transformace i-tého segmentu je popsána rovnicí 17.

$$T_i = T_{RZi} \cdot T_{TZi} \cdot T_{TXi} \cdot T_{RXi} \tag{17}$$

Rotace $T_{RXi}$ kolem osy X a translace $T_{TZi}$ v ose Z jsou v našem případě rovny jednotkové matici (pohybujeme se pouze v souřadnicích X a Y). Rovnici 17 můžeme proto zjednodušit (18).

$$T_i = T_{RZi} \cdot T_{TXi} \tag{18}$$

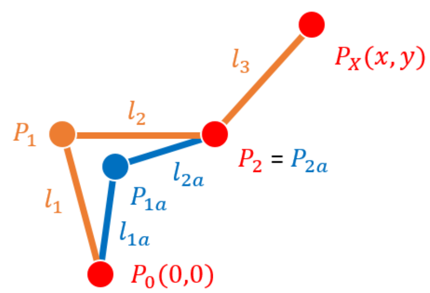
Matice popisující transformaci z bodu $P_0$ do $P_x$ je pak určena následovně (19-20).

$$T_c = T_{RZ1} \cdot T_{TX1} \cdot T_{RZ2} \cdot T_{TX2} \cdot T_{RZ3} \cdot T_{TX3} \tag{19}$$

$$P_x = P_0 \cdot T_c \tag{20}$$

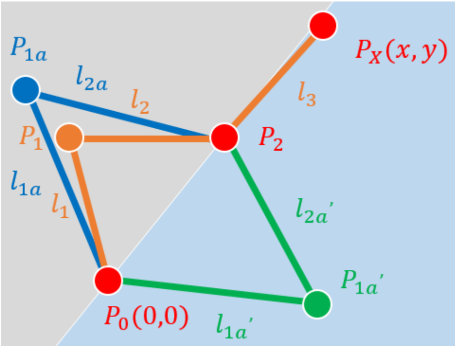
D-H parametr $l_3$ pro translaci $T_{TX3}$ z bodu $P_2$ do $P_x$ známe, proto můžeme zpětně určit souřadnice bodu $P_2$ vynásobením $P_x$ inverzní maticí ${T_{PX3}}^{-1}$ (21)(obr. 11). Tímto postupem nemůžeme určit rotaci $T_{RZ3}$ v bodě $P_2$, jelikož D-H parametr $\theta_3$ neznáme. Po stanovení souřadnic $P_{x2}$ a $P_{y2}$ bodu $P_2$ nám stačí použít metodu relaxace délky k určení pozice bodu $P_{1a}$.

$$P_x \cdot {T_{PX3}}^{-1} = \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & \begin{matrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$



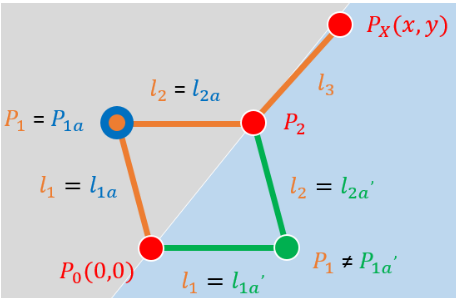

Obr. 11. Výpočet pozice předposledního bodu $P_2$

Pokud nyní použijeme metodu relaxace délky na situaci z obrázku 11, orientace posledního rotačního kloubu bude zachována. Stále zde zůstávají dvě možná řešení, která závisí na volbě počáteční pozice aproximačního bodu $P_{1a}$, resp. $P_{1a}'$. (viz obr. 12)




Obr. 12. Volba počátečních podmínek

Volbou počáteční pozice aproximačních bodů můžeme ovlivnit řešení úlohy inverzní kinematiky pomocí metody relaxace délky. Metoda relaxace délky konverguje k nejbližšímu řešení. Možná řešení jsou znázorněna na obrázku 13. Aproximační kinematický řetězec s počátečním bodem $P_{1a}$ (modrá barva) konverguje přímo do bodu $P_1$ (optimální řešení). Aproximační kinematický řetězec s počátečním bodem $P_{1a}'$ (zelená barva) konverguje do druhého možného řešení kde $P_1 \neq P_{1a}'$. Vše záleží na tom, jakou rovinu (šedou, nebo modrou) pro volbu počátečního bodu zvolíme.

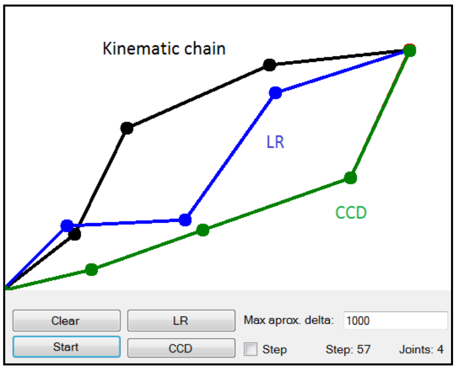



Obr. 13. Možná řešení úlohy inverzní kinematiky

Pokud použijeme metodu relaxace délky, musíme předpokládat, že algoritmus může najít jiné možné řešení, než předpokládáme. Pokud chceme hledat konkrétní (optimální) řešení, musíme vhodně zvolit počáteční podmínky aproximace. Tím, že volíme pozici aproximačních bodů, ve kterých se nacházejí rotační klouby, můžeme, při určité znalosti situace, kinematickou strukturu vhodně vystihnout.

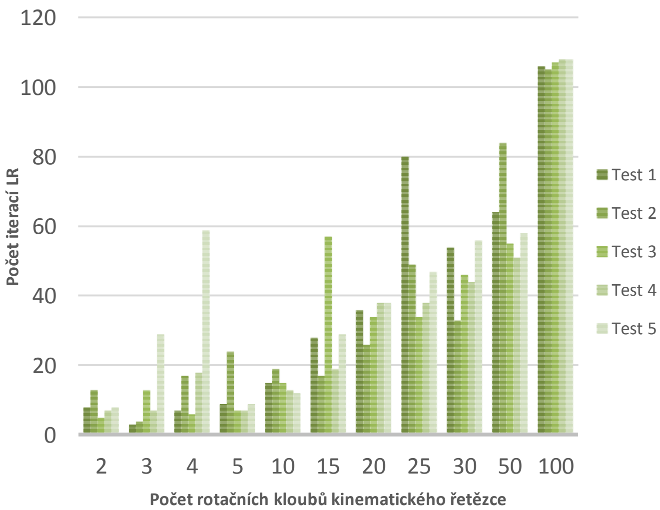
## V. POROVNÁNÍ S METODOU CCD

Metoda relaxace délky, stejně jako CCD, patří do skupiny heuristických algoritmů pro řešení úlohy inverzní kinematiky. CCD patří k nejjednodušším a velice populárním algoritmů, např. k animaci pohybu v herním průmyslu [3]. Cílem této kapitoly bude porovnat oba algoritmy. Pro tento účel byl vytvořen evaluační software (viz obr. 14).

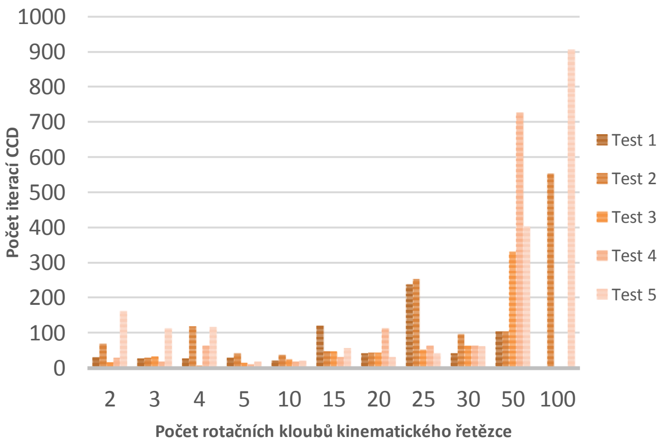



Obr. 14. Evaluační software

Pomocí evaluačního softwaru byl definován náhodný kinematický řetězec s libovolným počtem rotačních kloubů. Následně byl tento kinematický řetězec řešen pomocí obou metod. Zároveň byl počítán potřebný počet iterací pro obě metody, který byl nutný k dosažení řešení s definovanou přesností. Test byl opakován pětkrát (test 1 - 5) pro stejný počet rotačních kloubů, ale s rozdílnou náhodnou kinematickou strukturou. Počet kloubů kinematického řetězce se po pěti opakování zvětšoval. Potřebný počet iterací pro metodu relaxace délky je znázorněn na obr. 15. Potřebný počet iterací pro metodu CCD je znázorněn na obr. 16.

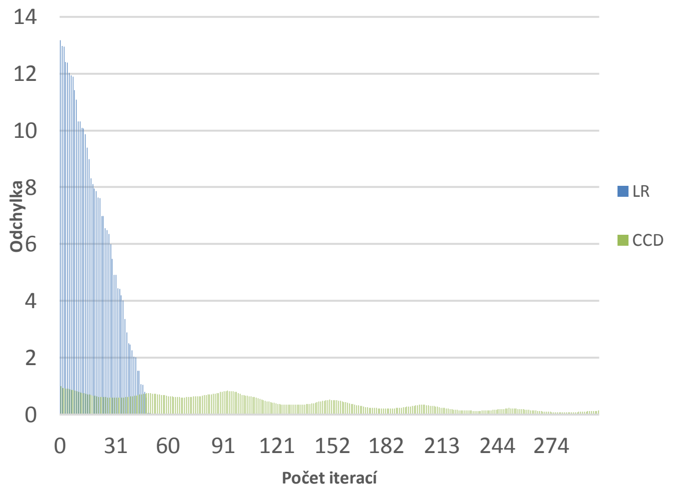



Obr. 15. Počet iterací – Metoda relaxace délky




Obr. 16. Počet iterací – Metoda CCD

Experiment ukázal, že metoda relaxace délky je rychlejší a stabilnější, než metoda CCD. Pouze tři z padesáti pěti různých průběhů iterací byly rychlejší při použití CCD algoritmu. Algoritmus CCD byl v některých případech, především pro větší počet kloubů, nestabilní a konvergovala pomalu. V některých případech nedosáhl řešení v předepsaném počtu iterací (ve třech případech). Metoda relaxace délky neměla problém se stabilitou řešení i pro větší počet kloubů. Je možné řešit kinematickou strukturu pro sto rotačních kloubů a metoda konverguje stále dobře. Metoda relaxace délky neustále zpřesňuje aproximační kinematický řetězec a postupně "utahuje" jeho celkovou délku. Konvergence obou metod pro větší počet rotačních kloubů je znázorněna na obr. 17.




Obr. 17. Průběh konvergence (modrá – metoda relaxace délky, zelená – metoda CCD, kinematický řetězec s dvaceti rotačními klouby)

Z experimentu vzešel ještě jeden zajímavý poznatek. Počet potřebných iterací pro metodu relaxace délky odpovídá proporčně počtu rotačních kloubů kinematického řetězce. Je to velmi dobře vidět z obrázku 15. Metoda CCD měla více náhodný průběh potřebného počtu iterací.

Metoda relaxace délky je také velmi dobře implementovatelná jako metoda CCD, jelikož používá pouze základní matematické operace. Toto tvrzení se potvrdilo při programování evaluačního softwaru.

## VI. ZÁVĚR

Tento článek ukazuje nový iterační heuristický algoritmus pro řešení úlohy inverzní kinematiky. Metoda relaxace délky prokázala na základě provedených experimentů velmi dobré vlastnosti. Mezi výhody algoritmu patří rychlost a stabilita konvergence. Algoritmus funguje velmi dobře také pro kinematické řetězce s velkým počtem rotačních kloubů. Zároveň je velmi dobře implementovatelný, jelikož je založen na jednoduchých matematických operacích.

Algoritmus byl porovnán s populární heuristickou metodou CCD. Za tímto účelem byl naprogramován evaluační software, který ukázal lepší vlastnosti metody relaxace délky oproti algoritmu CCD. Nová metoda relaxace délky se proto jeví jako dobrý nástroj pro heuristické řešení úloh inverzní kinematiky.

## POUŽITÁ LITERATURA

[1] V. H. John Lloyd, "Kinematics of common industrial robots," vol. 4, no. 2, pp. 169-191, June 1988.

[2] A. P. M. L.-W. Tsai, "Solving the Kinematics of the Most General Six- and Five-Degree-of-Freedom Manipulators by Continuation Methods," pp. 189-200, 01 Jun 1985.

[3] J. Lander, "Making Kine more flexible", Game Developer Magazine, vol. 11, pp. 15-22, 1998.

[4] D. Tolani, A. Goswami, and N. Badler, "Real-time inverse kinematics techniques for anthropomorphic limbs" Graphical Models, Vol. 62, No. 5, pp. 353–388, 2000.

[5] Hildenbrand, D., Zamora, J., Bayro-Corrochano, E., "Inverse kinematics computation in computer graphics and robotics using conformal geometric algebra" Adv. Appl. Clifford Algebras 18, 699–713 (2008)

[6] Aristidou, A., Lasenby, J., "Inverse kinematics: a review of existing techniques and introduction of a new fast iterative solver" Cambridge University Department of Engineering Technical Report, CUED/F-INFENG/TR-632 (2009)

[7] Dorst, L., Fontijne, D., Mann, S., "Geometric Algebra for Computer Science: An Object-Oriented Approach to Geometry" Morgan Kaufmann, San Mateo (2009)

[8] Wang, L.-C.T., Chen, C.C.: A combined optimization method for solving the inverse kinematics problems of mechanical manipulators. IEEE Trans. Robot. Autom. 7(4), 489–499 (1991)

[9] Paul, Richard (1981). "Robot manipulators: mathematics, programming, and control : the computer control of robot manipulators," MIT Press, Cambridge, MA. ISBN 978-0-262-16082-7

**Ing. Jan Čejka** narozen 4.4.1988 ve Frýdlantu v Čechách. V roce 2010 získal bakalářský titul s vyznamenáním na Technické univerzitě v Liberci, Fakultě mechatroniky, informatiky a mezioborových studií v oboru Elektronické informační a řídicí systémy. V roce 2012 získal magisterský titul s vyznamenáním na Technické univerzitě v Liberci, Fakultě mechatroniky, informatiky a mezioborových studií v oboru Automatické řízení a inženýrská informatika. Od roku 2016 pokračuje v kombinované formě doktorského studia oboru Technická kybernetika na Technické univerzitě v Liberci, Fakultě mechatroniky, informatiky a mezioborových studií.

Od roku 2012 působí ve společnosti ŠKODA AUTO a.s. jako robotový specialista. Ve své práci se zabývá programováním a řízením rozsáhlých robotových soustav.

Při svém studiu získal dvě ocenění za inovativní práci v soutěži Mitsubishi Electric v oblasti automatizace. Od roku 2013 vyvíjí software na kontrolu rozsáhlých robotových soustav pro potřeby firmy ŠKODA AUTO a.s.